第六章 卡尔曼滤波

- 6.1 信号模型
- 6.2 卡尔曼滤波方法
- 6.3 卡尔曼滤波器的应用

6.1 信号模型……

Rudolf Emil Kalman

- 匈牙利数学家
- BS&MS at MIT
- PhD at Columbia
- 1960年发表的论文《A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems》（线性滤波与预测问题的新方法）

A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems[1]

R. E. KALMAN
Research Institute for Advanced Study,[2]
Baltimore, Md.

The classical filtering and prediction problem is re-examined using the Bode-Shannon representation of random processes and the "state transition" method of analysis of dynamic systems. New results are:

(1) The formulation and methods of solution of the problem apply without modification to stationary and nonstationary statistics and to growing-memory and infinite-memory filters.

(2) A nonlinear difference (or differential) equation is derived for the covariance matrix of the optimal estimation error. From the solution of this equation the coefficients of the difference (or differential) equation of the optimal linear filter are obtained without further calculations.

(3) The filtering problem is shown to be the dual of the noise-free regulator problem.

The new method developed here is applied to two well-known problems, confirming and extending earlier results.

The discussion is largely self-contained and proceeds from first principles; basic concepts of the theory of random processes are reviewed in the Appendix.

被引用次数：29914

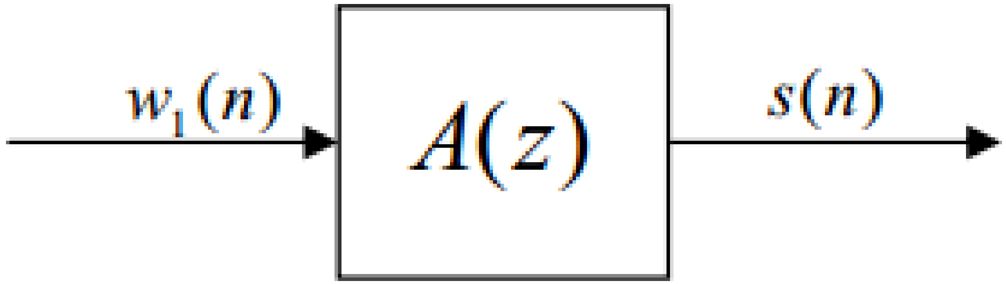
6.1 信号模型……

●6.1.1 状态方程和量测方程

维纳滤波的模型：信号 $s(n)$可以认为是由白噪声$w_1(n)$激励一个线性系统 $A(z)$的响应，假设响应和激励的时域关系可以用下式表示：

$$s(n) = as(n-1) + w_1(n-1)$$

上式也就是一阶**AR**模型。



6.1 信号模型……

在卡尔曼滤波中信号$s(n)$被称为是状态变量，用矢量的形式表示为$\mathbf{S(k)}$，激励信号$w_1(n)$也用矢量表示为$\mathbf{w_1(k)}$，激励和响应之间的关系用传递矩阵$\mathbf{A(k)}$来表示，得出状态方程：

$$\mathbf{S(k)=A(k)S(k-1)+w_1(k-1)}$$

上式表示的含义就是在*k*时刻的状态$\mathbf{S(k)}$可以由它的前一个时刻的状态$\mathbf{S(k-1)}$来求得，即认为*k*-1时刻以前的各状态都已记忆在状态$\mathbf{S(k-1)}$中了。

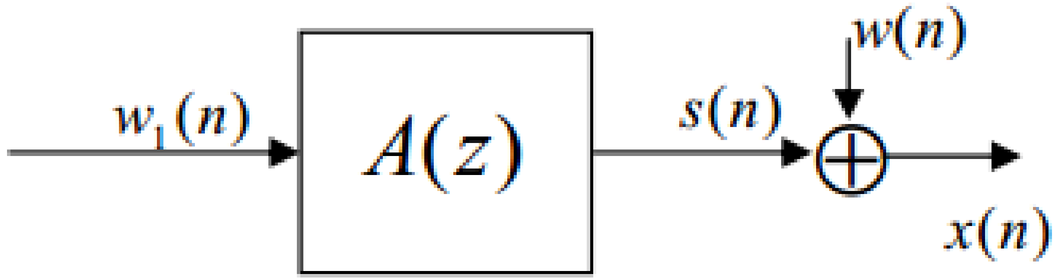
6.1 信号模型……

卡尔曼滤波是根据系统的量测数据（即观测数据）对系统的运动进行估计的，所以除了状态方程之外，还需要量测方程。

$$x(n) = s(n) + w(n)$$

在卡尔曼滤波中，$\mathbf{X(k)}$ 用表示量测到的信号矢量序列，$\mathbf{w(k)}$表示量测时引入的误差矢量，则量测矢量 $\mathbf{X(k)}$ 与状态矢量 $\mathbf{S(k)}$ 之间的关系可以写成

$$\mathbf{X(k)} = \mathbf{S(k)} + \mathbf{w(k)}$$



6.1 信号模型……

$$X(k) = S(k) + w(k)$$

上式和维纳滤波的概念上是一致的，也就是说卡尔曼滤波的一维信号模型和维纳滤波的信号模型是一致的。

把上式推广就得到更普遍的多维量测方程

$$X(k) = C(k)S(k) + w(k)$$

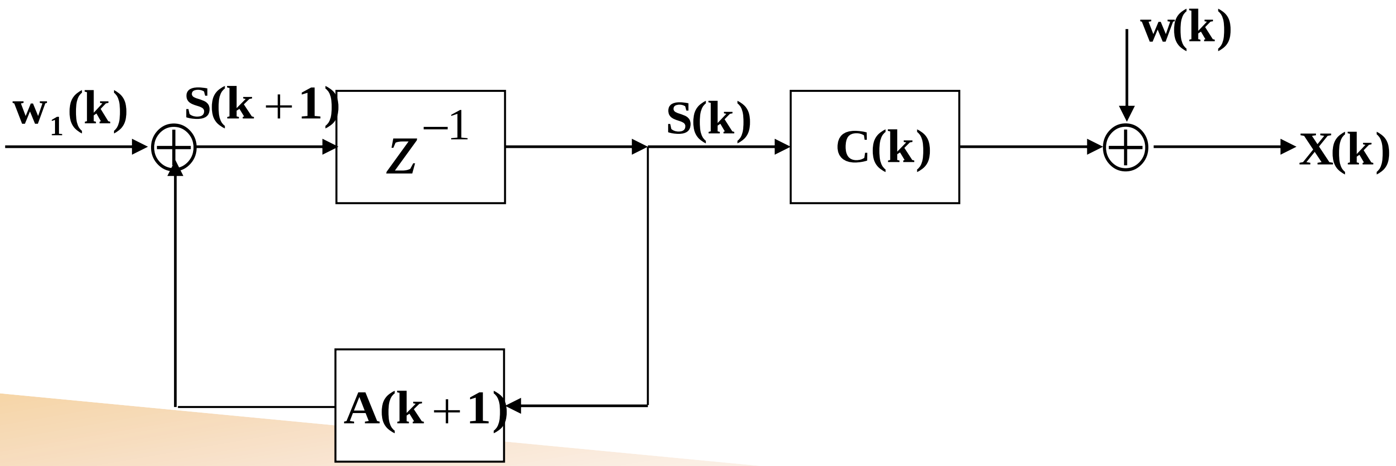
上式中 $C(k)$称为量测矩阵，它的引入原因是,量测矢量 $X(k)$ 维数不一定与状态矢量 $S(k)$的维数相同，因为我们不一定能观测到所有需要的状态参数。

6.1 信号模型……

●6.1.2 信号模型

$$S(k)=A(k)S(k-1)+w_1(k-1)$$ ⟶ 状态方程

$$X(k)=C(k)S(k)+w(k)$$ ⟶ 量测方程



6.1 信号模型……

【例6-1】设卡尔曼滤波中量测方程为 $\mathbf{X(k) = S(k) + w(k)}$，已知信号的自相关函数的z变换为：

$$R_{ss}(z) = \frac{0.36}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)}, 0.8 < |z| < 1.25$$

噪声的自相关函数为 $R_{ww}(m) = \delta(m)$，信号和噪声统计独立。求卡尔曼滤波信号模型中的 **A(k)**和 **C(k)**。

6.1 信号模型

解：根据等式 $R_{ss}(z)=\sigma_{w_1}^2 A(z)A(z^{-1})$ 式（5-23）

可以求得 $$=\frac{0.36z^{-1}z}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)}$$

$$A(z)=\frac{z^{-1}}{1-0.8z^{-1}}=\frac{S(z)}{W_1(z)}$$

变换到时域得： $s(k+1)=0.8s(k)+w_1(k)$

因此 $\mathbf{A(k)}=0.8$

又因为 $\mathbf{X(k)}=\mathbf{S(k)}+\mathbf{w(k)}$ ，

所以 **C(k)＝1**。

6.2 卡尔曼滤波方法……

●6.2.1卡尔曼滤波的一步递推法模型

把状态方程和量测方程重新给出：

$$\mathbf{S(k)=A(k)S(k-1)+w_1(k-1)}$$
$$\mathbf{X(k)=C(k)S(k)+w(k)}$$

假设信号的上一个估计值 $\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{k-1})$已知，现在的问题就是如何来求当前时刻的估计值 $\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{k})$ 。

6.2 卡尔曼滤波方法……

如果不考虑噪声 $w_1(k-1)$ 和 $w(k)$ 状态方程和量测方程变换如下：

$$\hat{S}'(k) = A(k)\hat{S}(k-1)$$

$$\hat{X}'(k) = C(k)\hat{S}'(k) = C(k)A(k)\hat{S}(k-1)$$

必然，观测值 $X(k)$ 和估计值 $\hat{X}'(k)$ 之间有误差，它们之间的差 $\tilde{X}(k)$ 称为新息（innovation）：

$$\tilde{X}(k) = X(k) - \hat{X}'(k)$$

显然，新息的产生是由于我们前面忽略了 $w_1(k-1)$ 与 $w(k)$ 所引起的。

6.2 卡尔曼滤波方法……

用新息 $\tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{k})$ 乘以一个修正矩阵 $\mathbf{H}(\mathbf{k})$，用它来代替式中 $\mathbf{w}_1(\mathbf{k}-1)$ 来对 $\mathbf{S}(\mathbf{k})$ 进行估计：

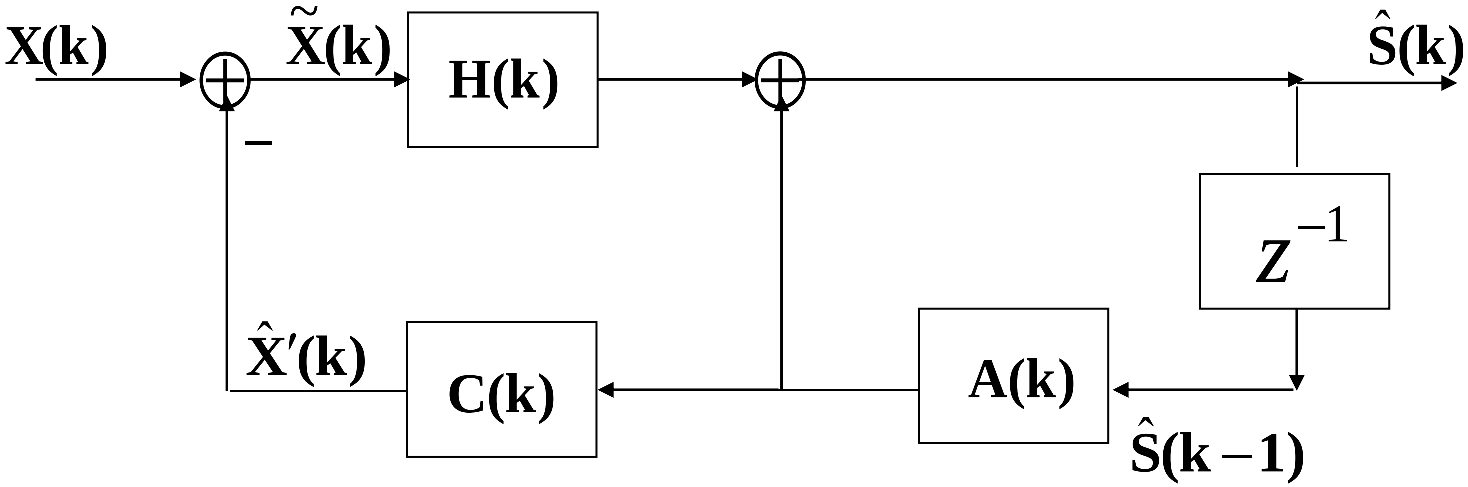
$$\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{k})=\mathbf{A}(\mathbf{k})\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{k}-1)+\mathbf{H}(\mathbf{k})\tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{k})$$

$$=\mathbf{A}(\mathbf{k})\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{k}-1)+\mathbf{H}(\mathbf{K})[\mathbf{X}(\mathbf{k})-\mathbf{C}(\mathbf{k})\mathbf{A}(\mathbf{k})\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{k}-1)]$$

通过上式可以画出卡尔曼滤波对 $\mathbf{S}(\mathbf{k})$ 进行估计的递推模型。

6.2 卡尔曼滤波方法……

输入为观测值 $X(k)$，输出为信号估计值 $\hat{S}(k)$。



卡尔曼滤波的一步递推法模型

$$\hat{S}(k) = A(k)\hat{S}(k-1) + H(k)[X(k) - C(k)A(k)\hat{S}(k-1)]$$

6.2 卡尔曼滤波方法……

6.2.2卡尔曼滤波的递推公式（pp.90）

卡尔曼滤波的一步递推公式：

$$\varepsilon'(k) = A(k)\varepsilon(k-1)A(k)^{\tau} + Q(k-1)$$

$$H(k) = \varepsilon'(k)C(k)^{\tau}[C(k)\varepsilon'(k)C(k)^{\tau} + R(k)]^{-1}$$

$$\varepsilon(k) = [I - H(k)C(k)]\varepsilon'(k)$$

$$\hat{S}(k) = A(k)\hat{S}(k-1) + H(K)[X(k) - C(k)A(k)\hat{S}(k-1)]$$

6.2 卡尔曼滤波方法

pp.91,【例6-2】

6.3 卡尔曼滤波器的应用……

【例6-3】已知条件和例6-2一样，状态方程和测量方程为： $\mathbf{S(k)=A(k)S(k-1)+w_1(k-1)}$

$\mathbf{X(k)=C(k)S(k)+w(k)}$，其中 $A=0.8$ ，$C=1$

$\mathbf{Q(k)}=\sigma_{w_1}^2=0.36$ ，$\mathbf{R(k)}=\mathrm{var}(w(k))=1$信号和噪声统计独立。求卡尔曼滤波器的稳态 $\mathbf{H(k)}$和$\mathbf{\varepsilon(k)}$。

6.3 卡尔曼滤波器的应用……

解：根据函数调用sys＝ss(A,B,C,D,1)，得到离散卡尔曼状态模型，采样周期这里设为1。A,C已知，由于函数调用中是设计了两个观测信号的，我们这里只有一个观测信号，所以B取[0 1]，后一个1表示噪声 $w_1(k-1)$ 的系数。D取0。实际的语句如下：

sys=ss(A,B,C,D,1)

然后调用函数[S,L, ε',H, $\mathcal{E}$]＝kalman(sys,Q,R)，设计离散卡尔曼滤波器。实际语句和计算结果如下：

[S,L,ε',H,$\mathcal{E}$]=kalman(sys,0.36,1)

L =0.3000

ε' =0.6000

H =0.3750

$\mathcal{E}$ =0.3750

这里省略了输出的S，它表示的信息是达到稳态后系统状态模型，H和 $\mathcal{E}$ 表示系统稳态的最终值 。

6.3 卡尔曼滤波器的应用……

- 有了修正矩阵和均方误差，代入下式就可以根据观测信号得到卡尔曼滤波的估计值了。

$$\hat{\mathbf{S}}(k)=\mathbf{A}(k)\hat{\mathbf{S}}(k-1)+\mathbf{H}(k)[\mathbf{X}(k)-\mathbf{C}(k)\mathbf{A}(k)\hat{\mathbf{S}}(k-1)]$$

- 从上面例题知道，只要确定了状态模型，就可以调用函数很快设计出卡尔曼滤波器。

$$H(z)=0.375(1-0.5z^{-1}),h(n)=0.375(0.5)^{n}$$

6.3 卡尔曼滤波器的应用……

- 实现代码

```
clear
A=0.8;
B=[0 1];
C=1;
D=0;
sys=ss(A,B,C,D,1);
[S L s1 H s]=kalman(sys,0.36,1)
```

SYS = SS(A,B,C,D) creates a SS object SYS representing the continuous-time state-space model

dx/dt = Ax(t) + Bu(t)

y(t) = Cx(t) + Du(t)

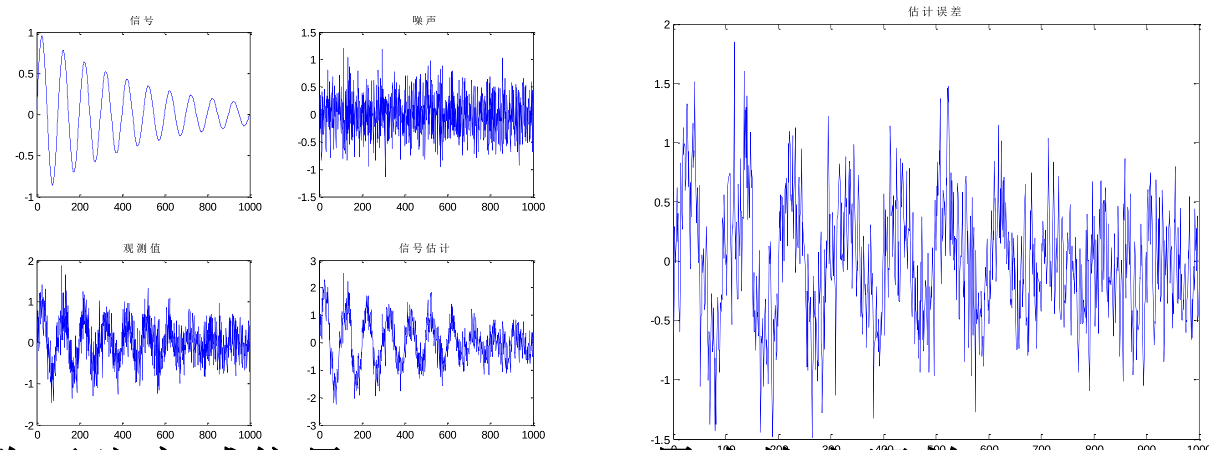
You can set D=0 to mean the zero matrix of appropriate dimensions. If one or more of the matrices A,B,C,D have uncertainty, SS returns an uncertain state-space (USS) model (Robust Control Toolbox only).

SYS = SS(A,B,C,D,Ts) creates a discrete-time state-space model with sample time Ts (set Ts=-1 if the sample time is undetermined).

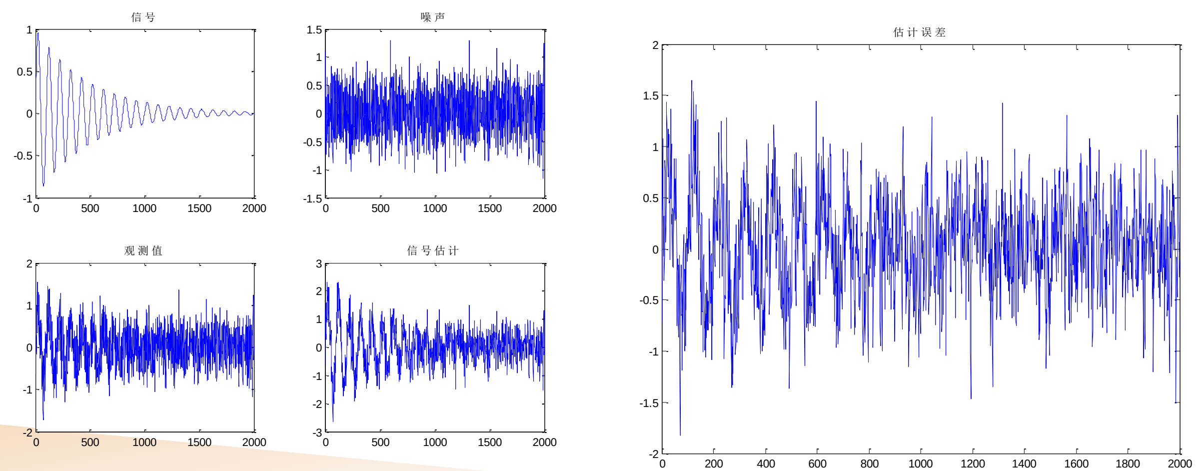
```
N=1000;%阶数
n=1:N;
s = exp(-0.002*n).*sin(pi*n/50);%仿真信号
w = 0.36*randn(1,N); % 白噪声，系数代表噪声相对强度
x = s+w; % 仿真信号
for i=1:N
   h(i)=0.5.^i;
end
ss = filter(h,1,x);
figure;
subplot(2,2,1);plot(n,s);title('信号');
subplot(2,2,2);plot(n,w);title('噪声');
subplot(2,2,3);plot(n,x);title('观测值');
subplot(2,2,4);plot(n,ss);title('信号估计');
figure;
plot(n,ss-s);title('估计误差');
error=mean((ss-s).^2)
```

6.3 卡尔曼滤波器的应用……

- 结果图



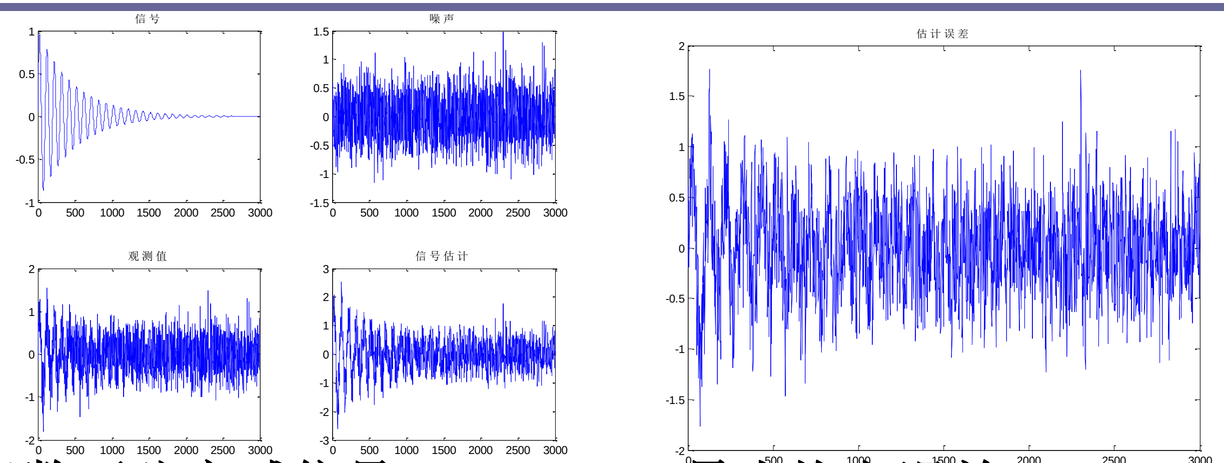
指数正弦衰减信号， N=1000，最小均方误差error=0.2731 。



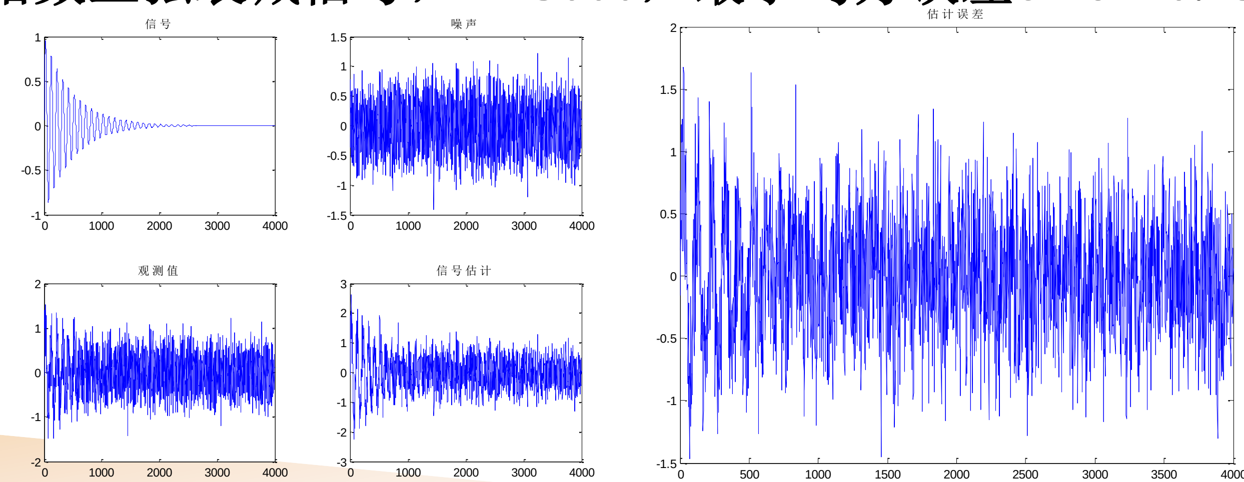
指数正弦衰减信号， N=2000，最小均方误差error=0.2350 。

6.3 卡尔曼滤波器的应用……

- 结果图



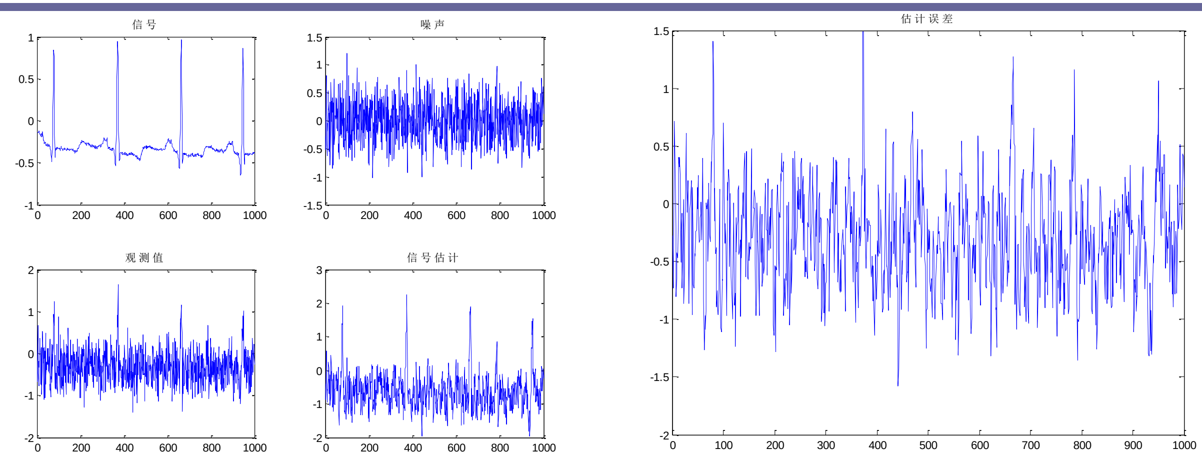
指数正弦衰减信号，N=3000，最小均方误差error=0.1997 。



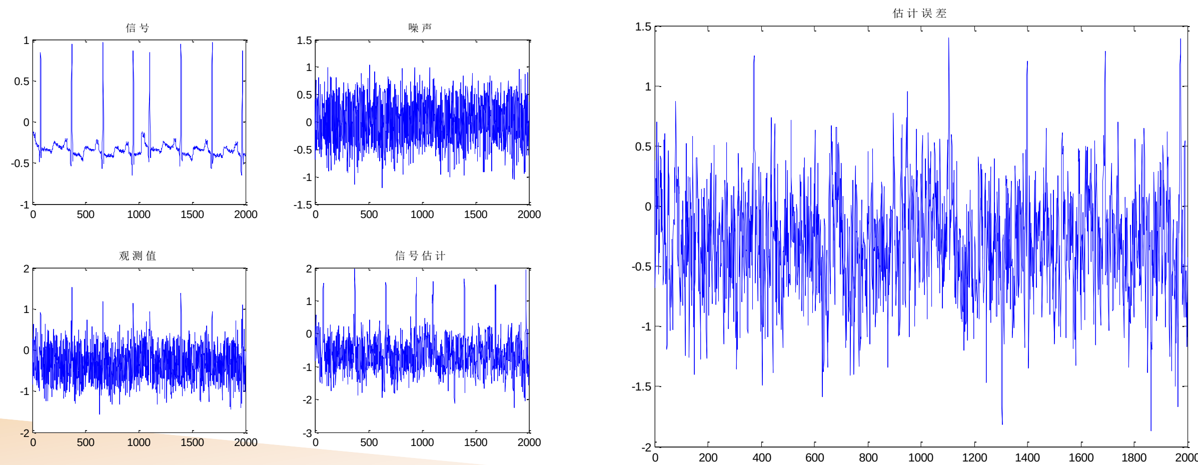
指数正弦衰减信号， N=4000，最小均方误差error=0.2017 。

6.3 卡尔曼滤波器的应用……

- 结果图



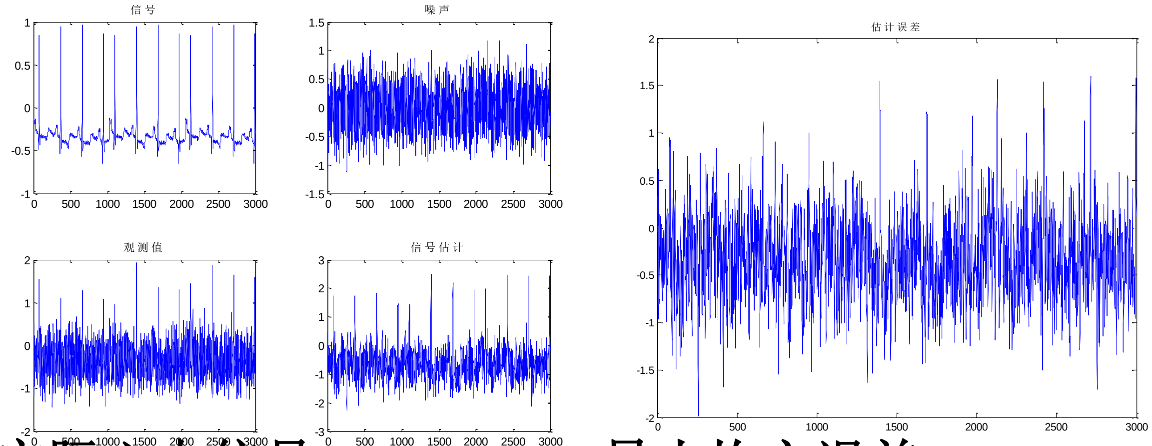
实际心电信号，N=1000，最小均方误差error= 0.2808 。



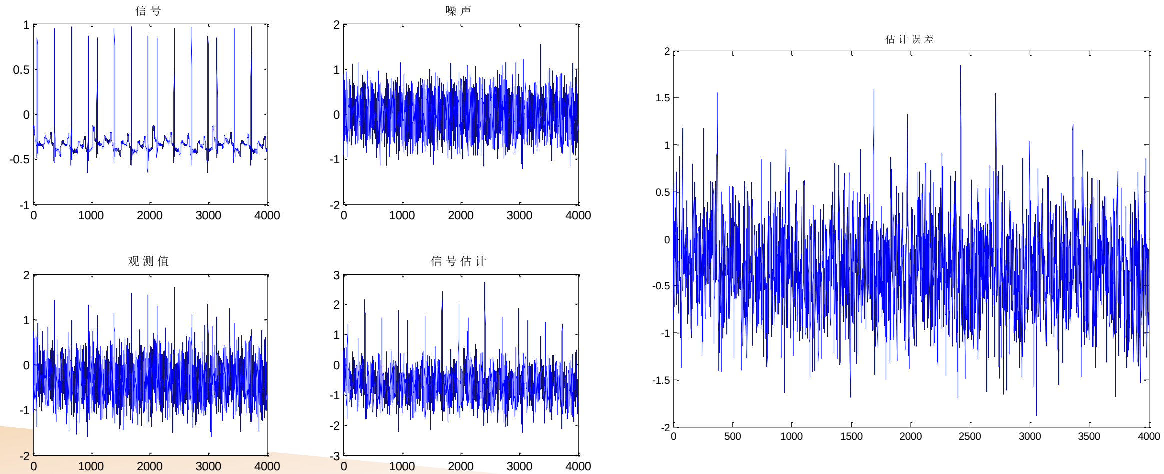
实际心电信号， N=2000，最小均方误差error= 0.2913 。

6.3 卡尔曼滤波器的应用……

- 结果图



实际心电信号，N=3000，最小均方误差error= 0.2946 。



实际心电信号， N=4000，最小均方误差error= 0.3054 。

6.3 卡尔曼滤波器的应用

- 卡尔曼滤波在诱发脑电位提取中的应用

（1）自发电位模型(EEG)和诱发电位(EP)模型的建立

（2）卡尔曼状态方程和量测方程的建立

（3）卡尔曼滤波器的数据处理结果

本章小结

1、掌握：信号模型；

2、熟悉：卡尔曼滤波原理和方法；

3、了解：卡尔曼滤波的应用。

本章习题

pp.95,习题6-1

总结卡尔曼滤波器

下集预告

第七章 随机信号的参数建模法

实验4详解……

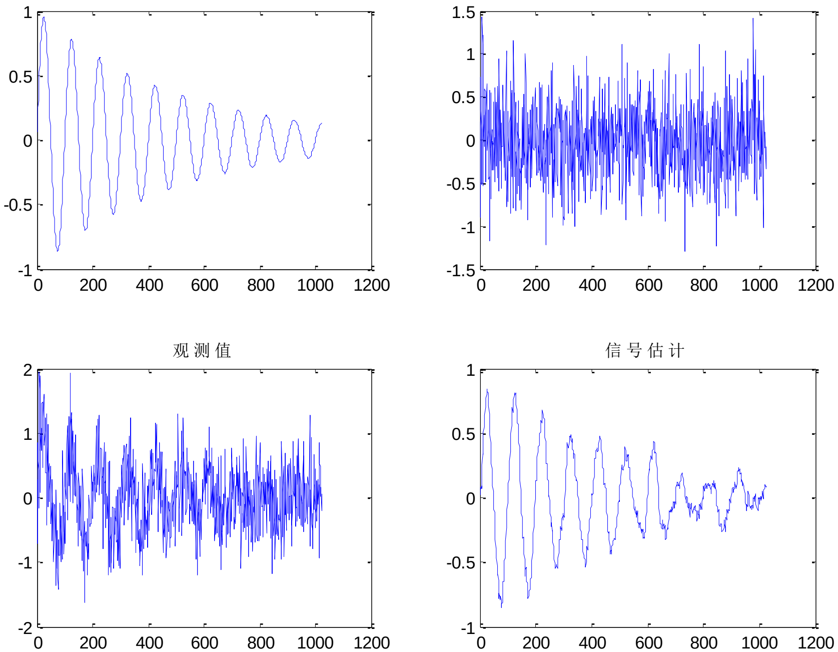
程序如下：

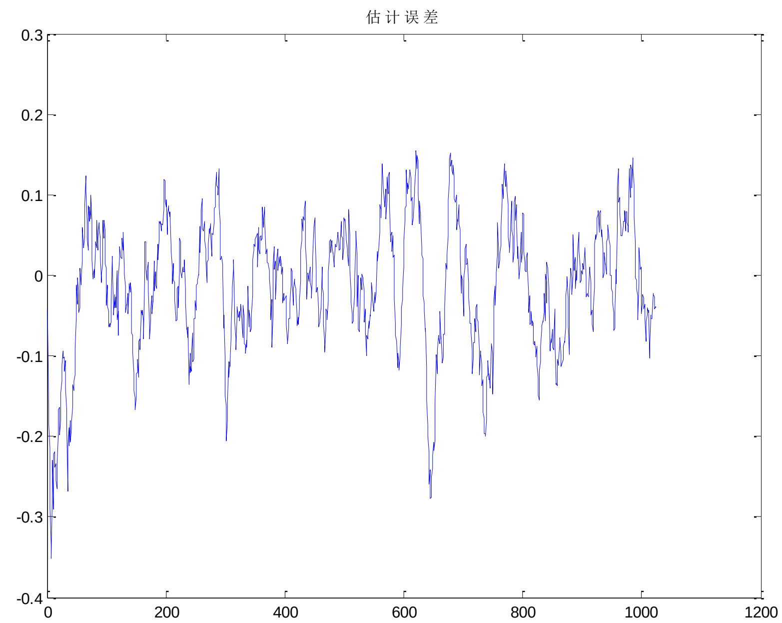
```
function [h,e] = WH(Rss,Rww,M)
% 求解维纳-霍夫方程的函数，其中M为信号的长度
e1 = 10;
e0 = 0;
N = 0;  % 给e1,e0,N 赋初值
while abs(e0-e1)>1e-6  % e1和e0不够接近则循环
   N = N+1;
   e0 = e1;
   Rxs = Rss(M:(M+N-1));
   Rxx = Rww(M:(M+N-1))+Rss(M:(M+N-1));
   R_xx = zeros(N);
   for j = 1:N
      for n = 1:N
         R_xx(j,n) = Rxx(abs(j-n)+1);
      end
   end
   h = inv(R_xx)*Rxs';
   e1 = Rss(M)-h'*Rxs';
end
N % 显示N的最终值
e = e1;
```

```
% 主程序
clear; clc;
M = input('信号的长度 M = ');
n = 1:M;
s = exp(-0.002*n).*sin(pi*n/50); % 仿真信号，可以自己生成，任意形式
% load ecgdata; % 实际心电信号
% s = ecgdata(1:M)';
% load eegdata; % 实际脑电信号
% s = eegdata(1:M)';
w = 0.4*randn(1,M); % 白噪声，系数代表噪声相对强度
x = s+w; % 仿真信号
Rss = xcorr(s,s); %估计信号自相关函数
Rww = xcorr(w,w); % 估计噪声自相关函数
[h,e] = WH(Rss,Rww,M);
ss = filter(h,1,x); %用维纳滤波器滤波
figure;
subplot(2,2,1);plot(n,s);title('信号');
subplot(2,2,2);plot(n,w);title('噪声');
subplot(2,2,3);plot(n,x);title('观测值');
subplot(2,2,4);plot(n,ss);title('信号估计');
figure;
plot(n,ss-s);title('估计误差');
error=mean((ss-s).^2)
```

实验4详解……

1、s为指数正弦衰减信号，w为强度为0.4白噪声，M=1024

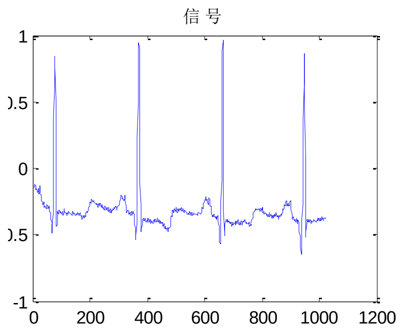


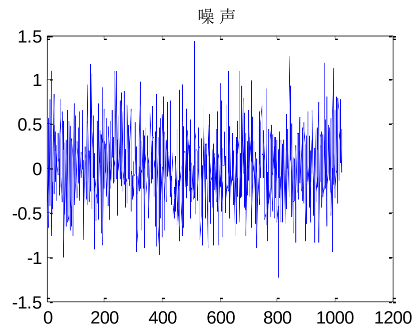


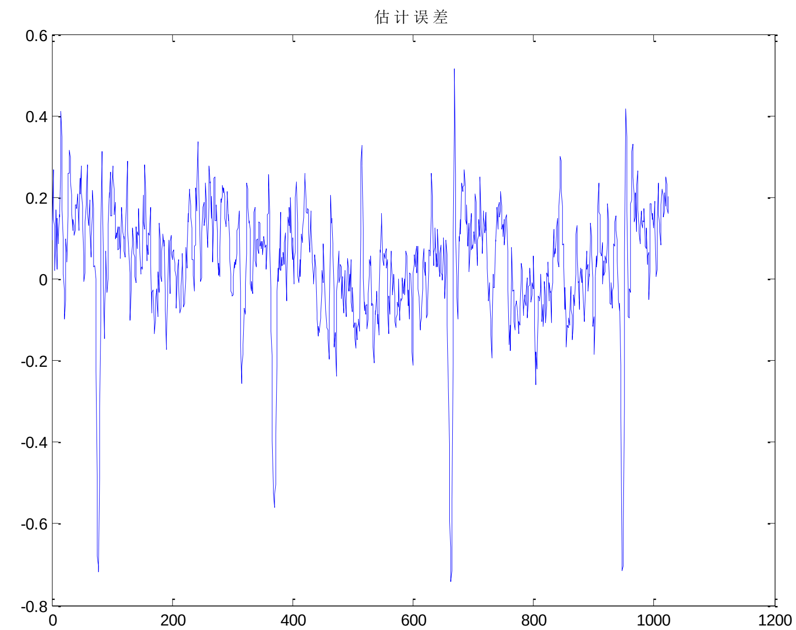
N=264，最小均方误差error=0.0068。

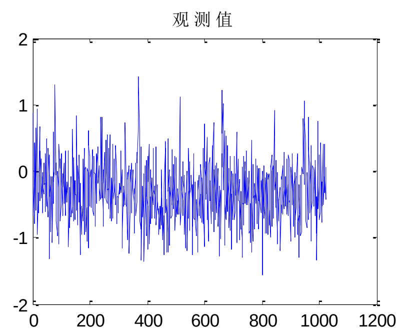
实验4详解……

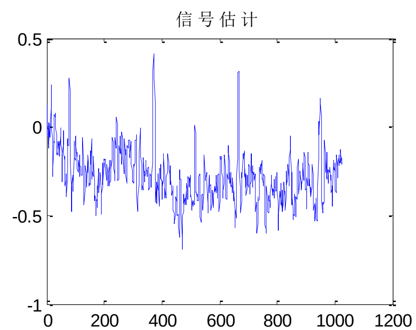
2、s为实际心电信号，w为强度为0.4白噪声，M=1024







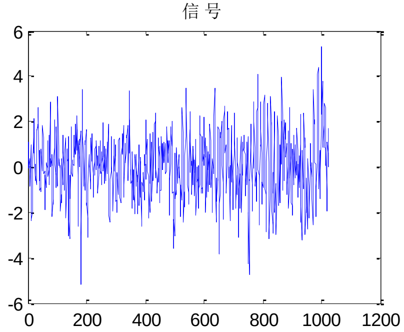


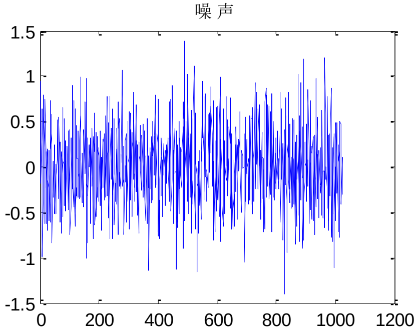


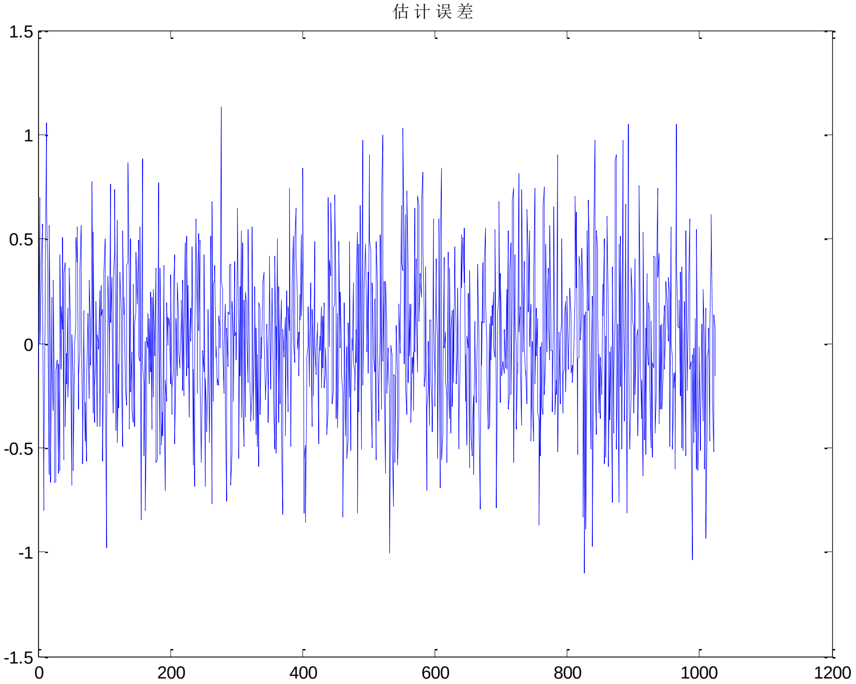
N=99，最小均方误差error=0.0236。

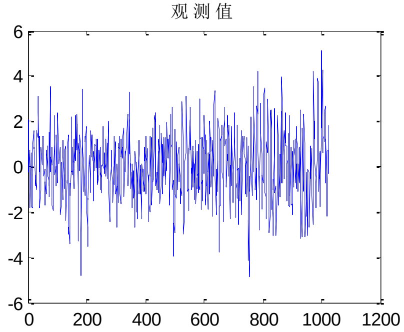
实验4详解……

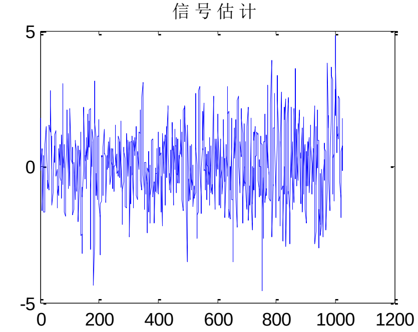
3、s为实际脑电信号，w为强度为0.4白噪声，M=1024







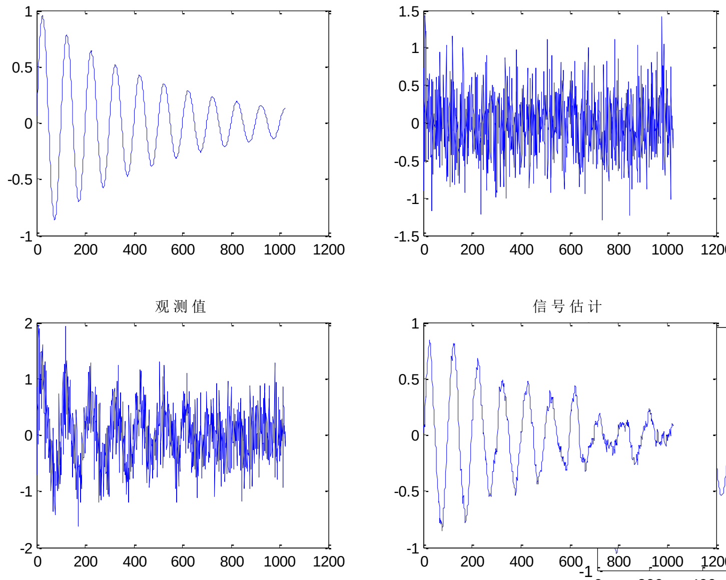




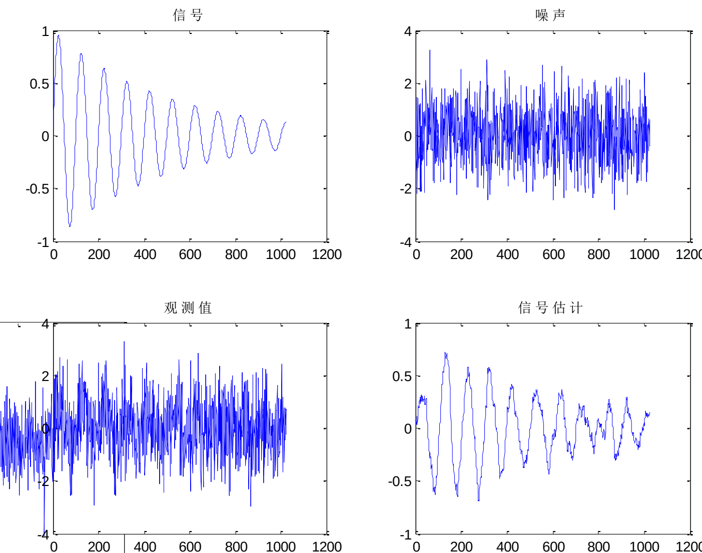
N=59，最小均方误差error=0.1414。

实验4详解……

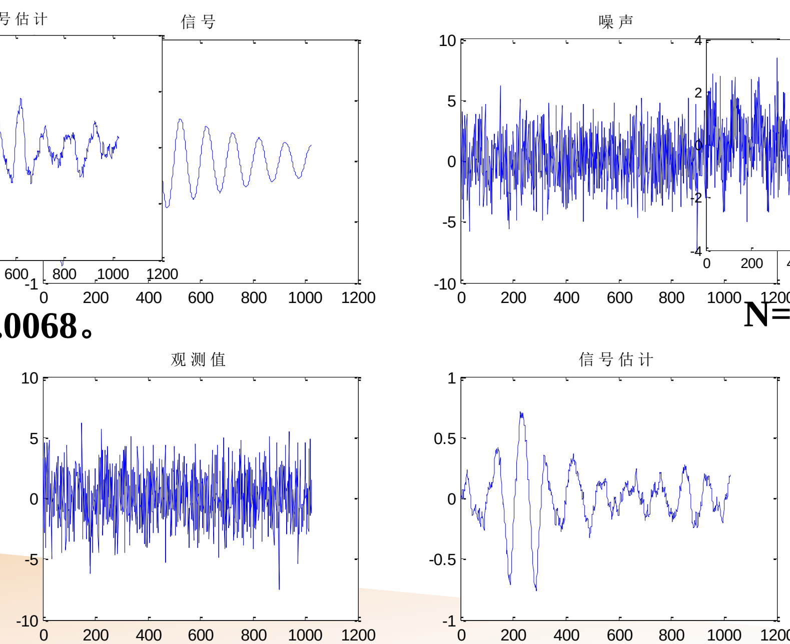
4、s为指数正弦衰减信号，w为强度为0.4、1和2白噪声，M=1024



N=264，最小均方误差error=0.0068。



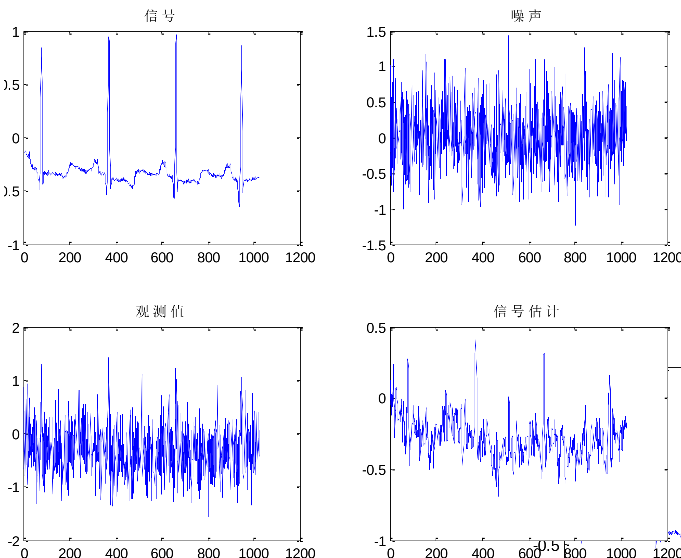
N=121，最小均方误差error=0.0287。



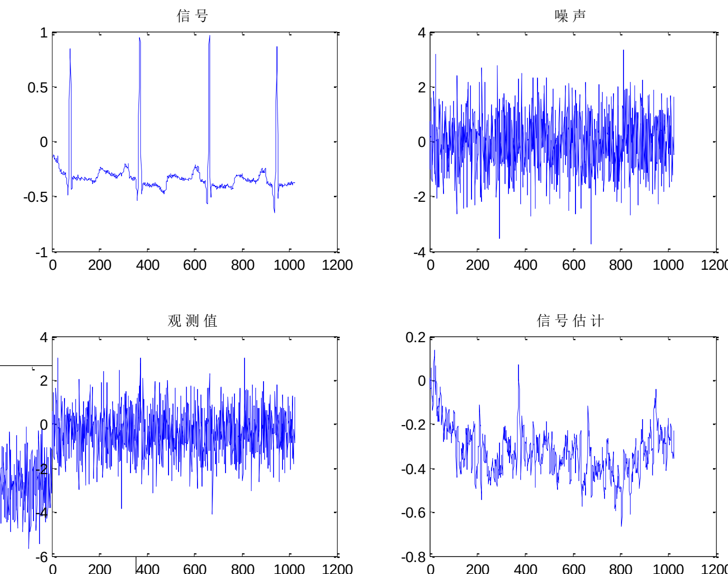
N=135，最小均方误差error=0.0740。

实验4详解……

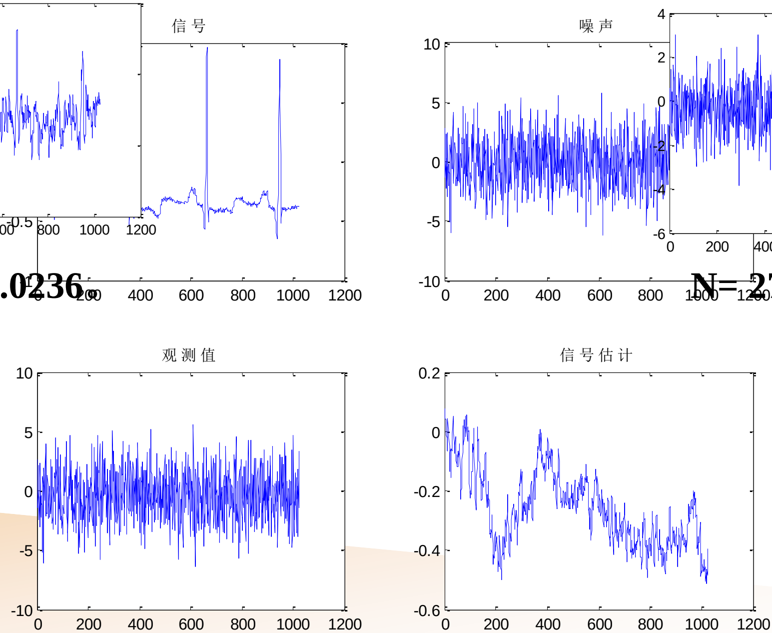
5、s为实际心电信号，w为强度为0.4、1和2白噪声，M=1024



N=99，最小均方误差error=0.0236。



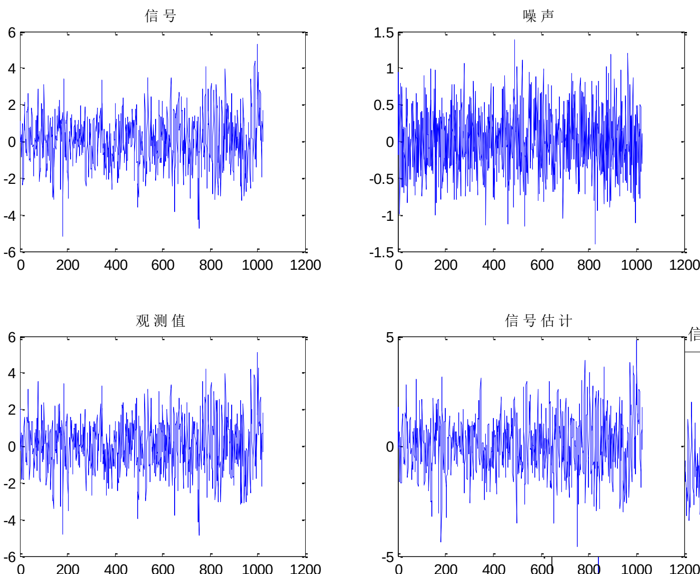
N=276，最小均方误差error=0.0333。



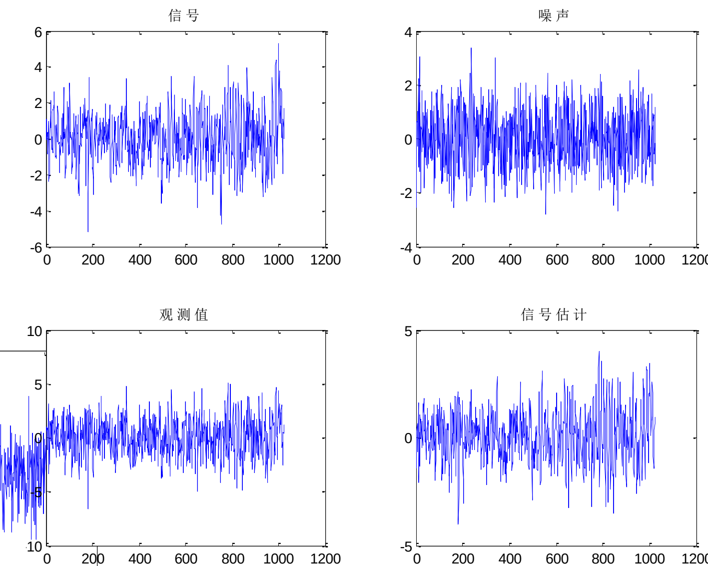
N=420，最小均方误差error=0.0421。

实验4详解……

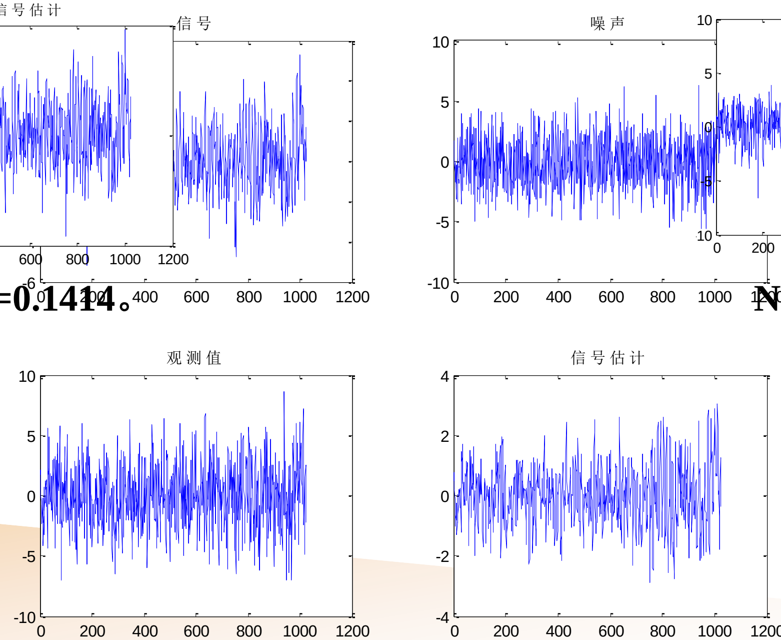
6、s为实际脑电信号，w为强度为0.4、1和2白噪声，M=1024



N=59，最小均方误差error=0.1414。



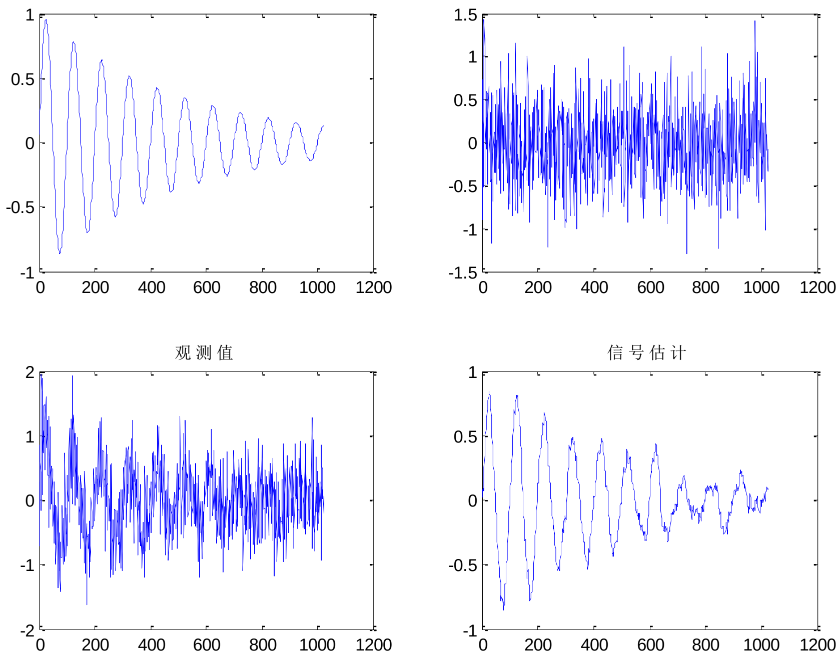
N=770，最小均方误差error=0.4268。

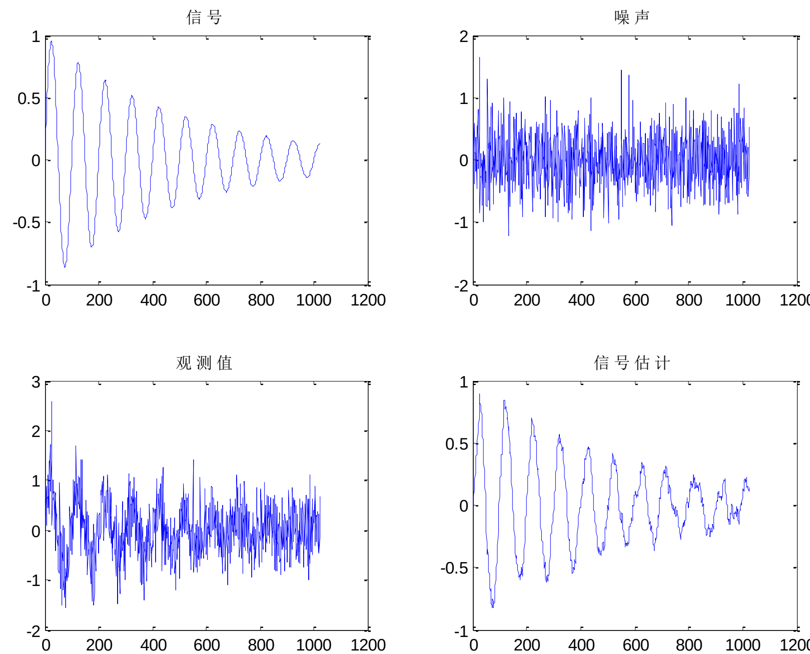


N=452，最小均方误差error=0.7617。

实验4详解……

7、s为指数正弦衰减信号，w为强度为0.4白噪声，M=1024



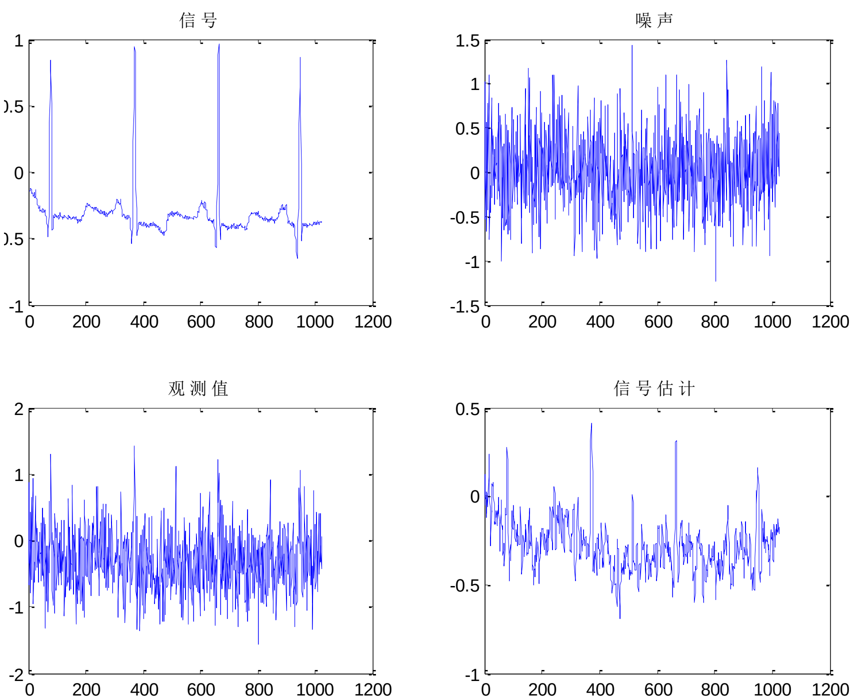


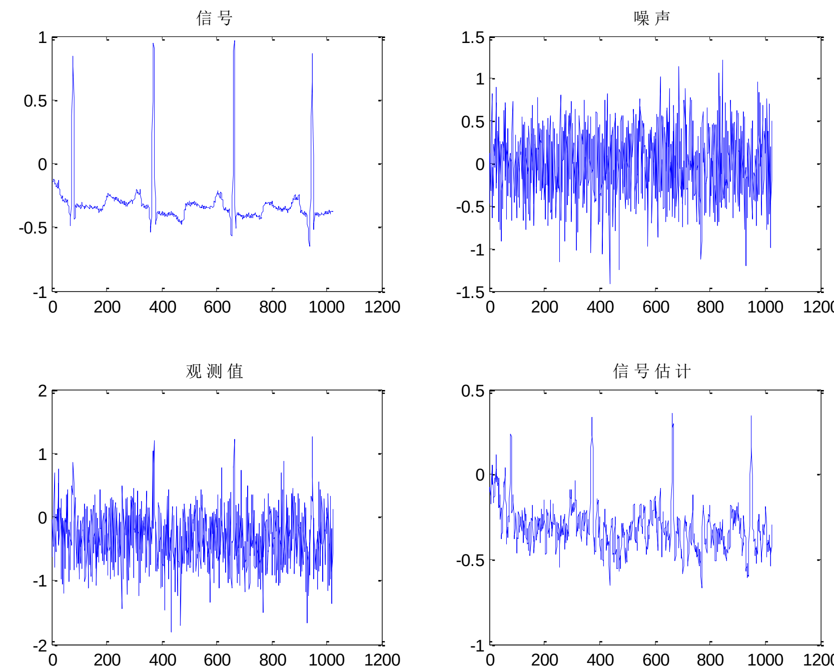
abs(e0-e1)>1e-6，N=264，最小均方误差error=0.0068。

abs(e0-e1)>1e-7，N=210，最小均方误差error= 0.0066 。

实验4详解……

8、s为实际心电信号，w为强度为0.4白噪声，M=1024



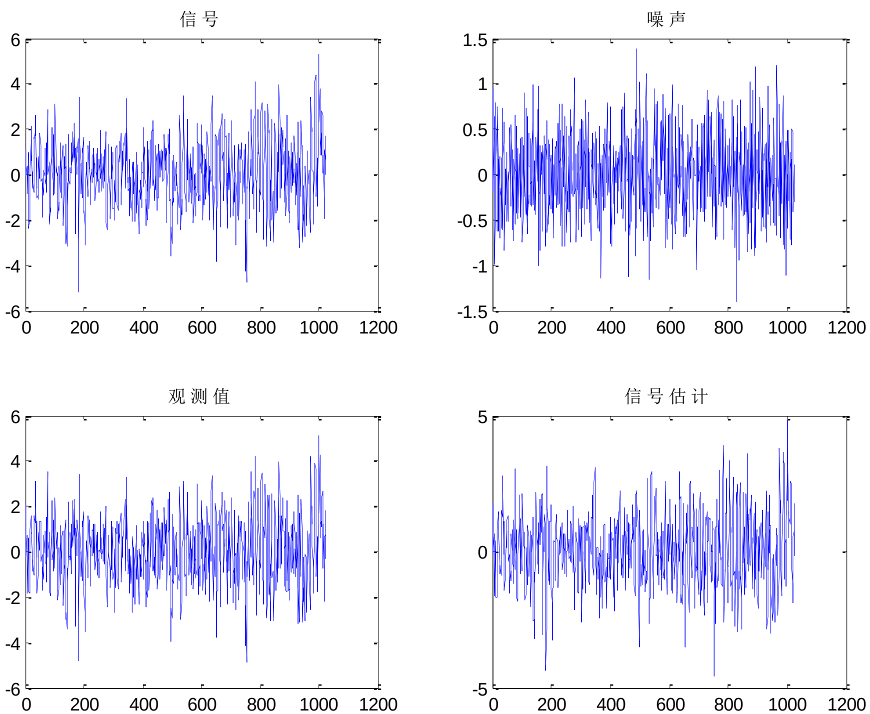


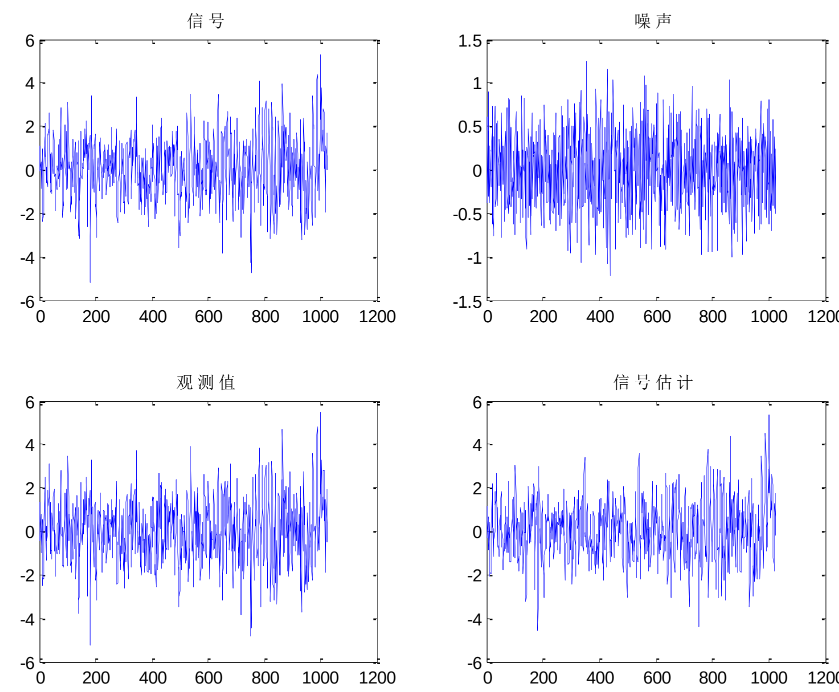
abs(e0-e1)>1e-6，N=99，最小均方误差error=0.0236。

abs(e0-e1)>1e-7，N=499，最小均方误差error= 0.0166 。

实验4详解……

9、s为实际脑电信号，w为强度为0.4白噪声，M=1024



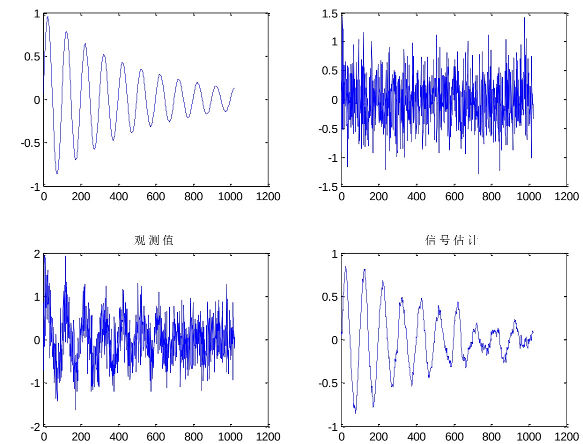


abs(e0-e1)>1e-6，N=59，最小均方误差error=0.1414。

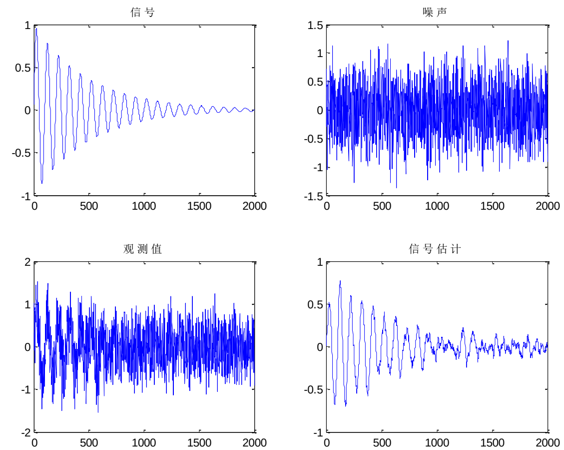
abs(e0-e1)>1e-7，N=1001，最小均方误差error= 0.1169 。

实验4详解……

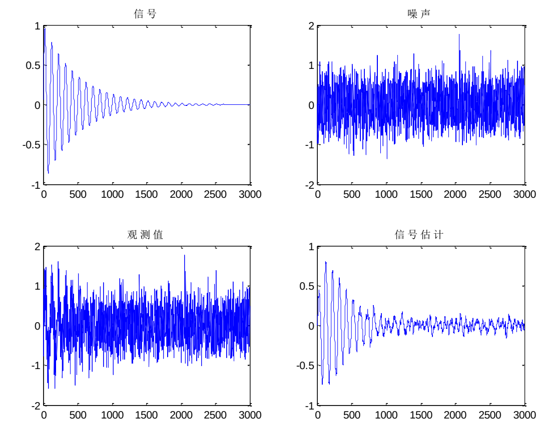
10、s为指数正弦衰减信号，w为强度为0.4白噪声，M=1024,2000,3000,4000,5000,6000



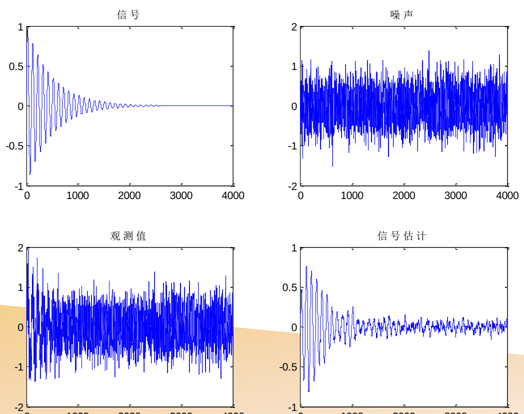
M=1024,最小均方误差error=0.0068。



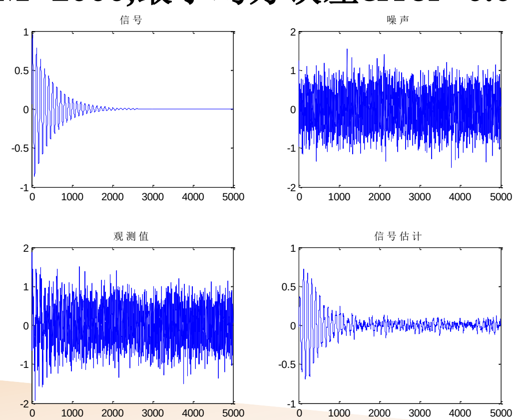
M=2000,最小均方误差error=0.0082。



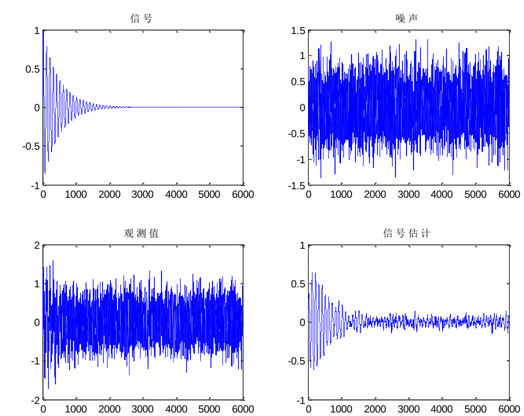
M=3000,最小均方误差error=0.0065。



M=4000,最小均方误差error=0.0052。



M=5000,最小均方误差error=0.0045。



M=6000,最小均方误差error=0.0044。

实验4详解

1、你考虑的情况越多，报告的分数越高！

2、你分析的越全面，报告的分数越高！